Unidad IX: Programación lineal

Objetivo específico: Entender ampliamente el fenómeno del comportamiento de los modelos matemáticos para la aplicación en la programación lineal.

Conceptos a desarrollar en la unidad: Dar al alumno las herramientas necesarias, para que pueda efectuar el análisis la aplicación en los programas lineales con los modelos matemáticos.

9.1 Formas estándar y canónica[1]

Un problema de programación lineal puede ser establecido en diferentes formas equivalentes a través de manipulaciones apropiadas. Dos formas en particular serán de bastante utilidad. Estas son las formas Estándar y Canónica. Un problema lineal se dice que está en la forma estándar sí:

a) Todas las restricciones son igualdades
b) Todas las variables son no-negativas
c) Las limitaciones (lado derecho de la restricción) son positivas

El Método Simplex, está diseñado para ser aplicado únicamente hasta que el problema se encuentre en la forma Estándar. La forma Canónica es también de bastante utilidad, especialmente en explorar la relación de Dualidad. Un problema de P.L. está en la forma canónica si para un problema de:

Maximización, las variables son no-negativas y las restricciones son del tipo ≤
Minimización, las variables son no-negativas y las restricciones son del tipo ≥

Considere el siguiente problema de P.L. en forma canónica

$$\text{Minimice} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \text{Minimice } Z=CX$$

$$\text{Sujeto a:} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{Sujeto a:}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad ,i = 1,2,\ldots m \qquad\qquad Ax \geq b$$

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad X \geq 0$$

Donde:

A= Matriz de coeficientes de las variables en el sistema de ecuaciones de (mxn)
aij= coeficiente de la variable j en la restricción i
x=Vector solución (nx1)
xj= Variable j
bi= Lado derecho de la restricción i (Limitación i)
C=Vector de costos o utilidades (1xn)
cj= Coeficiente de la variable j en la función objetivo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{bmatrix}$$

[1] Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos.Wayne L. Winston, 4a Edicion. .

Los motivos para que un problema no esté en la forma estándar son:

1. Algunas restricciones son desigualdades
2. Algunas bi son negativas
3. Algunas variables de decisión xj pueden ser negativas

Igualdades y desigualdades en las restricciones
Una desigualdad puede fácilmente ser transformada a una igualdad (ecuación) a través del uso de las variables de holgura qué representan en caso de:

a) La desigualdad menor o igual (≤), la deficiencia de unidades para el lado izquierdo de la restricción iguale a lado derecho de la misma. Por lo que se agrega una variable de holgura con signo positivo en el lado izquierdo de la restricción.

b) La desigualdad menor o igual (≥),el exceso de unidades que tiene el lado izquierdo de la restricción con respecto al lado derecho de la misma. Por lo que se agrega una variable de holgura con signo negativo en el lado izquierdo de la restricción.

Método simple

El método del simplex fue creado en 1947 por el matemático George Dantzig. El método del simplex se utiliza, sobre todo, para resolver problemas de programación lineal en los que intervienen tres o más variables. El álgebra matricial y el proceso de eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales constituyen la base del método simplex.

Es un procedimiento iterativo que permite ir mejorando la solución a cada paso. El proceso concluye cuando no es posible seguir mejorando más dicha solución. Partiendo del valor de la función objetivo en un vértice cualquiera, el método consiste en buscar sucesivamente otro vértice que mejore al anterior. La búsqueda se hace siempre a través de los lados del polígono (o de las aristas del poliedro, si el número de variables es mayor). Cómo el número de vértices (y de aristas) es finito, siempre se podrá encontrar la solución.

El método del simplex se basa en la siguiente propiedad: si la función objetivo, f, no toma su valor máximo en el vértice A, entonces hay una arista que parte de A, a lo largo de la cual f aumenta.

Procedimiento general del método simplex

1) Establézcase la tabla inicial de simples. Formular la función objetivo y las restricciones e introducir las variables de decisión, variable en la solución, valor en solución (LD), C (contribución de la variable), Z (costo de introducir la variable), C – Z (contribución neta de la variable).
2) Selecciónese la columna pivote. Ésta es la columna con el número positivo más grande en el renglón inferior (C - Z). Esta se convierte en la nueva variable de la solución.
3) Selecciónese el renglón pivote. Éste es el renglón con la razón más pequeña del valor LD dividido por el valor de la columna pivote. Úsense sólo números positivos. Esto identifica la variable que deja la solución.
4) Enciérrese en un círculo el elemento pivote. Ésta es la intersección del renglón y la columna pivotes.
5) Conviértase al elemento pivote en un 1. Hágase esto dividiendo cada valor del renglón pivote entre el valor pivote. Métase este renglón en una tabla nueva.
6) Genérense los demás renglones de la nueva tabla con ceros en la columna pivote. Esto se hace multiplicando el nuevo renglón (del paso 5) por el negativo del elemento en la columna pivote. El resultado será sumado al antiguo renglón. Introdúzcase este renglón revisado en la nueva tabla, y continúese este procedimiento en cada renglón de la sección central de la tabla.

7) Prueba de optimización. Calcúlense los valores de Z y C – Z. Los valores de Z de cada columna son (elementos de la columna) (C). Si todos los valores de C – Z son ≤ 0, la solución es óptima. Léanse los valores de las variables en la solución de la columna de LD y el valor de la función objetivo del renglón de Z en la columna de LD. Si la solución no es óptima, regrese al paso 2.

Variables de holgura- El método simples empieza con el planteamiento de una función objetivo y ecuaciones de restricción. Las rutinas computarizadas de programación lineal (PL) automáticamente arreglarán esos datos iniciales, pero tratándose de soluciones manuales, debe construirse en cada paso la tabla de simples. Esto requiere que las restricciones sean establecidas como igualdades. En los problemas de maximización se logra esto añadiendo variables de holgura (s) a cada restricción. La holgura representa una cantidad no utilizada, o la diferencia entre lo que es usado y el límite de lo que puede usarse.

Técnicas con variables artificiales

En general se recurre a las variables artificiales cuando al menos una de las restricciones en el modelo original es del tipo >=, esto con el fin de obtener la solución básica factible inicial.
Las variables artificiales proporcionan un mecanismo matemático para obtener una primera solución básica.
El efecto de estas variables en la solución final es cancelado por el valor de la penalización muy alta en la función objetivo.
Estas variables en términos del problema inicial.

Pasos:

1) Expresar el modelo original en la forma estándar o tabular y llevarlo preferentemente a un problema de maximización multiplicándolo por -1.
2) Sumar del lado izquierdo de cada ecuación, correspondiente a las restricciones del tipo >= una variable no-negativa.

Estas variables se llaman variables artificiales y su adición causa una alteración en las restricciones.
Esta dificultad es superada garantizando que las variables artificiales sean igual a 0 en la solución final, lo cual se consigue asignando un valor muy alto o grande a dichas variables (-M para un problema de maximización o +M para un problema de minimización). Con M>0.

3) El uso de las variables artificiales proporciona una solución inicial básica.

4) Proceder con los pasos normales del método simplex.

Método de la m.

Pasos:

1) Expresar el modelo original en la forma estándar e igualar a cero la función objetivo.

2) Sumar del lado izquierdo de cada ecuación, correspondiente a las restricciones del tipo ³ y/o =, una variable no negativa. Estas variables se llaman variables artificiales y su adición causa una alteración a las restricciones correspondientes esta dificultad es superada garantizando que las variables artificiales serán igual a cero (Z=0) en la solución final. Esto es alcanzado asignando un valor de penalización muy grande, por unidad, a estas variables en la función objetivo. Tal valor de penalización será designado por +M, si es un problema de maximización y -M para un problema de minimización con M>0.
3) El uso de variables artificiales proporcionan una solución inicial básica, sin embargo para ello los coeficientes en la función objetivo deben ser igual a cero, para lograrlo usamos el procedimiento (algoritmo) del método simplex.

4) Toda vez que se comprueba que se tiene una solución inicial básica-factible no-óptima se procede con los pasos normales del algoritmo del método simplex, hasta obtener, si existe, la solución óptima.

Las variables artificiales solamente proporcionan un mecanismo matemático para obtener una primera solución básica, el efecto de estas variables en la solución final es cancelado por el valor de penalización muy alto en la función objetivo. Estas variables son ficticias y no tienen alguna interpretación física ni económica directa en términos del problema original.

Método de las dos fases

Pasos:

Como su Nombre lo indica, consiste en resolver problemas en dos fases:

1) Expresar el modelo original en la forma estándar e igualar a cero la función objetivo.

2) Sumar del lado izquierdo de cada ecuación, correspondiente a las restricciones del tipo ^{3} y/o =, una variable no negativa. Estas variables se llaman variables artifíciales y su adición causa una alteración a las restricciones correspondientes esta dificultad es superada garantizando que las variables artificiales serán igual a cero ($W_0=0$) en la solución óptima de la primera fase.

3) <u>FASE 1</u>. Formular un nuevo modelo, reemplazando la función objetivo del modelo original por la sumatoria de las variables artificiales que se sumaron en el paso anterior. La nueva función objetivo será entonces de Minimizar sujeta a las restricciones del problema original (en esta fase la función objetivo siempre será de minimizar, sin importar que la función objetivo del problema original sea de maximizar o minimizar). Si el problema tiene el espacio de soluciones factibles, el valor mínimo (optimo) de la nueva función objetivo será de cero (lo cual indica que todas las variables artificiales son cero). Si esto ocurre podremos continuar con la fase dos de lo contrario, si el valor mínimo es mayor que cero el problema es terminado ya que esto indica que no existe espacio de soluciones factibles.

4) <u>FASE 2</u>. Considerar la solución básica óptima de la fase I como una solución inicial para el problema original, en esta fase, de la tabla optima de la fase I se eliminan las columnas de las variables artificiales y se sustituye la función objetivo por la del problema original, Toda vez que se comprueba que se tiene una solución inicial básica-factible no-óptima se procede con los pasos normales del algoritmo del método simplex, hasta obtener, si existe, la solución óptima.

Forma canónica

El adjetivo canónico se usa con frecuencia en matemática para indicar que algo es natural, como debe ser e independiente de elecciones arbitrarias, que es absoluto y no relativo a un observador, que es intrínseco y no depende de un sistema de referencia o de un sistema de coordenadas, que pertenece a la estructura propia de lo que estudiamos.

Decir de algo que es canónico es decir que no es arbitrario, que todos coincidimos en ello si lo miramos con atención. Aunque siempre se use en sentido impreciso, es un concepto central en matemáticas, ciencia que aspira a desentrañar con rigor lo que se entiende por canónico y a sacar a la luz todo lo que es canónico.

Algunos sinónimos, más o menos lejanos, son: natural, universal, absoluto, intrínseco, general, estructural, independiente, completo, y algunos antónimos son: relativo, arbitrario, particular, usual, ingenioso, por costumbre o convenio

No sólo es un concepto elusivo y central en matemáticas. Bajo la denominación de φυσις (physis, de donde deriva el nombre de física) fue un concepto central de la filosofía griega. La mayor dificultad que tenemos para acercarnos a ella es el extrañamiento del hombre moderno de tal concepto. Mientras que el hombre griego se encontraba sumergido en él, hoy en día el hombre moderno culto vive fuera de él. Malamente sobrevive en matemáticas (donde con mucha frecuencia se usa en sentidos espurios) y sobre todo en la filosofía.

En el siglo XX, quien mejor ha sabido expresar su sentido ha sido Heidegger. En sus palabras φυσις significa la fuerza que impera, brota y permanece regulada por ella misma. Como manifestación opuesta los griegos introdujeron lo que llamaban θεσις (thesis), lo puesto, o el νομος (nomos), regla en sentido de costumbre, o τεχνη (techné), que significa producción a partir de un saber (técnica).

Veamos algunos ejemplos del uso correcto y del abuso del término:

- Si se habla del **orden canónico de los datos**, significa que los datos se ordenan según su orden natural, un orden que no es invención del autor sino que pertenece a la estructura propia de lo que se estudia. Aquí canónico se usa en el sentido de natural o estructural.

  Así, si los datos son números naturales, lo canónico es ordenarlos de menor a mayor (o de mayor a menor, realmente hay dos ordenaciones naturales y no puede decirse que una es canónica y la otra no). Si fueran notas musicales, lo natural es ordenarlas por el tono (de graves a agudas, o de agudas a graves...). En cambio, si fueran palabras españolas y se ordenasen como en los diccionarios, ése no sería un orden canónico; pues es claro que poner la b antes que la c es una elección arbitraria que hacemos por costumbre y por convenio: no pertenece a la estructura misma de las palabras. En este ejemplo se ve muy bien la oposición entre φυσις y νομος.

- Si se habla de la **forma canónica de la ecuación** de una curva plana, es un uso espurio de la palabra canónico. Significa que en distintos sistemas de referencia o sistemas de coordenadas la curva adquiere diferentes ecuaciones. En algunos sistemas la ecuación de la curva es notablemente más sencilla, y la frase se refiere a una forma que se considera más simple. Aquí *canónico* se utiliza como sinónimo de simple, sencillo y breve. Sería mejor decir *ecuación reducida* o *forma usual de la ecuación*.

- Cuando se habla de la **base canónica del espacio vectorial $\mathbf{R}^n$**, se abusa del término, y debería decirse la **base usual de $\mathbf{R}^n$**, porque la estructura de espacio vectorial no determina de modo natural ninguna base particular, y para fijar la base a la que se quiere hacer referencia es necesario introducir alguna estructura adicional, como es la descomposición en producto directo.

- Al hablar de la **proyección canónica en el conjunto cociente** queremos decir que es la única proyección que podemos definir en general para todo conjunto cociente. En cada caso particular se podría definir una aplicación distinta del conjunto inicial en el conjunto cociente; pero sólo la proyección llamada canónica puede definirse a la vez para todas las relaciones de equivalencia posibles. Aquí canónico se usa en el sentido de universal.

9.2 Variables de holgura[2]

El Método Simplex es un método analítico de solución de problemas de programación lineal capaz de resolver modelos más complejos que los resueltos mediante el método gráfico sin restricción en el número de variables.

El Método Simplex es un método iterativo que permite ir mejorando la solución en cada paso. La razón matemática de esta mejora radica en que el método consiste en caminar del vértice de un poliedro a un vértice vecino de manera que aumente o disminuya (según el contexto de la función objetivo, sea maximizar o minimizar), dado que el número de vértices que presenta un poliedro solución es finito siempre se hallará solución.

Este famosísimo método fue creado en el año de 1947 por el estadounidense George Bernard Dantzig y el ruso Leonid Vitalievich Kantorovich, con el ánimo de crear un algoritmo capaz de solucionar problemas de m restricciones y n variables.

¿Que es una matriz identidad?

Una matriz puede definirse como una ordenación rectangular de elementos, (o listado finito de elementos), los cuales pueden ser números reales o complejos, dispuestos en forma de filas y de columnas.

La matriz idéntica o identidad es una matriz cuadrada (que posee el mismo número tanto de columnas como de filas) de orden *n* que tiene todos los elementos diagonales iguales a uno (1) y todos los demás componentes iguales a cero (0), se denomina matriz idéntica o identidad de orden *n,* y se denota por:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{nxn} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3}$$

La importancia de la teoría de matrices en el Método Simplex es fundamental, dado que el algoritmo se basa en dicha teoría para la resolución de sus problemas.

Observaciones importantes al utilizar método simplex

Variables de holgura y exceso

El Método Simplex trabaja basándose en ecuaciones y las restricciones iniciales que se modelan mediante programación lineal no lo son, para ello hay que convertir estas inecuaciones en ecuaciones utilizando unas variables denominadas de holgura y exceso relacionadas con el recurso al cual hace referencia la restricción y que en el tabulado final representa el *"Slack or surplus"* al que hacen referencia los famosos programas de resolución de investigación de operaciones, estas variables adquieren un gran valor en el análisis de sensibilidad y juegan un rol fundamental en la creación de la matriz identidad base del Simplex.

---

[2] Investigación de operaciones. Aplicaciones y algoritmos.Wayne L. Winston, 5a Edicion. .

Estas variables suelen estar representadas por la letra "S", se suman si la restricción es de signo "<= " y se restan si la restricción es de signo ">=".

Por ejemplo:

Inecuaciones modeladas mediante programación lineal

$$2X1 + 3X2 + 1X3 \leq 500$$

$$3X1 + 1X2 + 1X3 \leq 700$$

$$4X1 + 2X2 + 2X3 \leq 800$$

Inecuaciones transformadas en ecuaciones

$$2X1 + 3X2 + 1X3 + 1S1 + 0S2 + 0S3 = 500$$

$$3X1 + 1X2 + 1X3 + 0S1 + 1S2 + 0S3 = 700$$

$$4X1 + 2X2 + 2X3 + 0S1 + 0S2 + 1S3 = 800$$

Matriz Identidad

$$4X1 + 2X2 + 2X3 \geq 800$$

Inecuaciones transformadas en ecuaciones

$$2X1 + 3X2 + 1X3 - 1S1 + 0S2 + 0S3 = 500$$

$$3X1 + 1X2 + 1X3 + 0S1 - 1S2 + 0S3 = 700$$

$$4X1 + 2X2 + 2X3 + 0S1 + 0S2 - 1S3 = 800$$

Variable artificial / método de la "m"

Una variable artificial es un truco matemático para convertir inecuaciones ">=" en ecuaciones, o cuando aparecen igualdades en el problema original, la característica principal de estas variables es que no deben formar parte de la solución, dado que no representan recursos. El objetivo fundamental de estas variables es la formación de la matriz identidad.

Estas variables se representa por la letra *"A",* siempre se suman a las restricciones, su coeficiente es M (por esto se le denomina Método de la M grande, donde M significa un número demasiado grande muy poco atractivo para la función objetivo), y el signo en la función objetivo va en contra del sentido de la misma, es decir, en problemas de Maximización su signo es menos (-) y en problemas de Minimización su signo es (+), repetimos con el objetivo de que su valor en la solución sea cero (0).

Método simplex paso a paso

El problema

La empresa el SAMÁN Ltda. Dedicada a la fabricación de muebles, ha ampliado su producción en dos líneas más. Por lo tanto actualmente fabrica mesas, sillas, camas y bibliotecas. Cada mesa requiere de 2 piezas rectangulares de 8 pines, y 2 piezas cuadradas de 4 pines. Cada silla requiere de 1 pieza rectangular de 8 pines y 2 piezas cuadradas de 4 pines, cada cama requiere de 1 pieza rectangular de 8 pines, 1 cuadrada de 4 pines y 2 bases trapezoidales de 2 pines y finalmente cada biblioteca requiere de 2 piezas rectangulares de 8 pines, 2 bases trapezoidales de 2 pines y 4 piezas rectangulares de 2 pines. Cada mesa cuesta producirla $10000 y se vende en $ 30000, cada silla cuesta producirla $ 8000 y se vende en $ 28000, cada cama cuesta producirla $ 20000 y se vende en $ 40000, cada biblioteca cuesta producirla $ 40000 y se vende en $ 60000. El objetivo de la fábrica es maximizar las utilidades.

Paso 1: Modelación mediante programación lineal

Las variables:

$\mathbf{X_1}$ **=** Cantidad de mesas a producir (unidades)

$\mathbf{X_2}$ **=** Cantidad de sillas a producir (unidades)

$\mathbf{X_3}$ **=** Cantidad de camas a producir (unidades)

$\mathbf{X_4}$ **=** Cantidad de bibliotecas a producir (unidades)

Las restricciones:

$2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 2X_4 <= 24$

$2X_1 + 2X_2 + 1X_3 <= 20$

$2X_3 + 2X_4 <= 20$

$4X_4 <= 16$

La función Objetivo:

$Z_{MAX} = 20000X_1 + 20000X_2 + 20000X_3 + 20000X_4$

Paso 2: convertir las inecuaciones en ecuaciones

En este paso el objetivo es asignar a cada recurso una variable de Holgura, dado que todas las restricciones son "<=".

$2X_1 + 1X_2 + 1X_3 + 2X_4 + 1S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 24$

$2X_1 + 2X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0S_1 + 1S_2 + 0S_3 + 0S_4 = 20$

$0X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 2X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 1S_3 + 0S_4 = 20$

$0X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 4X_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 1S_4 = 16$

De esta manera podemos apreciar una matriz identidad (n = 4), formado por las variables de holgura las cuales solo tienen coeficiente 1 en su respectivo recurso, por el ejemplo la variable de holgura "S1" solo tiene coeficiente 1 en la restricción correspondiente a el recurso 1.

La función objetivo no sufre variaciones:

$\mathbf{Z_{MAX}} = 20000\mathbf{X_1} + 20000\mathbf{X_2} + 20000\mathbf{X_3} + 20000\mathbf{X_4}$

Paso 3: Definir la solución básica inicial

El Método Simplex parte de una solución básica inicial para realizar todas sus iteraciones, esta solución básica inicial se forma con las variables de coeficiente diferente de cero (0) en la matriz identidad.

$1\mathbf{S_1} = 24$

$1\mathbf{S_2} = 20$

$1\mathbf{S_3} = 20$

$1\mathbf{S_4} = 16$

Paso 4: Definir la tabla simplex inicial

	Cj									
Cb	Variable Solucion	Solucion								
	Zj									
	Cj - Zj									

Solución: (segundo término)= En esta fila se consigna el segundo término de la solución, es decir las variables, lo más adecuado es que estas se consignen de manera ordenada, tal cual como se escribieron en la definición de restricciones.

Cj = La fila "Cj" hace referencia al coeficiente que tiene cada una de las variables de la fila "solución" en la función objetivo.

Variable Solución = En esta columna se consigna la solución básica inicial, y a partir de esta en cada iteración se van incluyendo las variables que formarán parte de la solución final.

Cb = En esta fila se consigna el valor que tiene la variable que se encuentra a su derecha "Variable solución" en la función objetivo.

Zj = En esta fila se consigna la contribución total, es decir la suma de los productos entre término y Cb.

Cj - Zj = En esta fila se realiza la diferencia entre la fila Cj y la fila Zj, su significado es un "*Shadow price",* es decir, la utilidad que se deja de recibir por cada unidad de la variable correspondiente que no forme parte de la solución.

__Paso 5: Realizar las iteraciones necesarias__

Este es el paso definitivo en la resolución por medio del Método Simplex, consiste en realizar intentos mientras el modelo va de un vértice del poliedro objetivo a otro.

1. Evaluar que variable entrará y cual saldrá de la solución óptima:

	Maximizar	Minimizar
Variable que entra	La más positiva de los Cj - Zj	La más negativa de los Cj - Zj
Variable que sale	Siendo ***b*** los valores bajo la celda solución y ***a*** el valor correspondiente a la intersección entre ***b*** y la variable que entra. La menos positiva de los ***b/a***.	Siendo ***b*** los valores bajo la celda solución y ***a*** el valor correspondiente a la intersección entre ***b*** y la variable que entra. La más positiva de los ***b/a***.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0	
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4	b/a
0	S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0	24/2 = 12
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0	20/0 = N/A
0	S3	20	0	0	2	2	0	0	1	0	20/2 = 10
0	S4	16	0	0	0	4	0	0	0	1	16/4 = 4
	Zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	Cj - Zj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0	

En este caso todos los Cj - Zj son iguales por ende la decisión se toma al azar "X4", por ende los valores "a" son los que se encuentran consignados en la columna "X4" es decir, 2 - 0 - 2 y 4 respectivamente. los valores "b" son 24 - 20 20 y 16 respectivamente. Cuando el valor de "a" es menor o igual a 0 este no se tiene en cuenta.

En la columna "b/a" se encuentran los resultados de la respectiva operación siendo el menos positivo el resultado 4, por ende la variable que sale es "S4".

2. El hecho de que una variable distinta forme parte de las variables solución implica una serie de cambios en el tabulado Simplex, cambios que se explicarán a continuación.

Lo primero es no olvidar el valor del "a" correspondiente a la variables a entrar, en este caso el "a = 4".

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	$\boxed{X4}$	S1	S2	S3	S4
0	S1									
0	S2									
0	S3									
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj									
	Cj - Zj									

S4	16	0	0	0	$\boxed{4}$	0	0	0	1

=

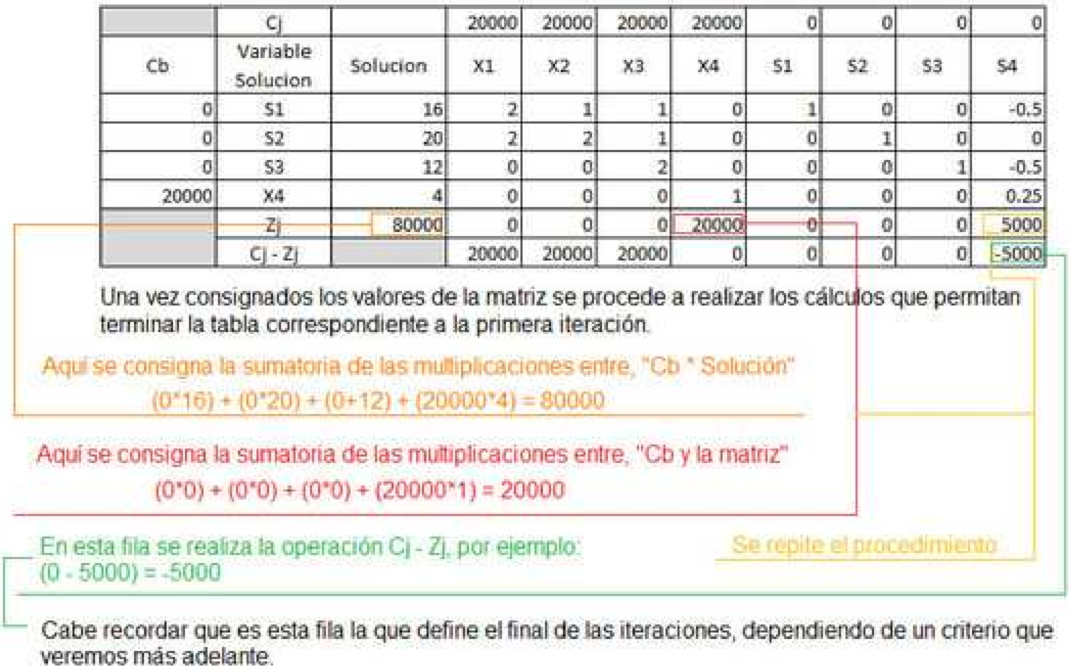
a = 4

Toda la fila saliente es dividida entre el valor del "a" de la variable entrante, en este caso 4

Lo siguiente es comenzar a rellenar el resto de la tabla, fila x fila.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0.5
0	S2									
0	S3									
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj									
	Cj - Zj									

Se repite este procedimiento con las dos filas restantes, ahora se harán los cálculos correspondientes en el resto de las celdas.



	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0.5
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0.5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	80000	0	0	0	20000	0	0	0	5000
	Cj - Zj		20000	20000	20000	0	0	0	0	-5000

De esta manera se culmina la primera iteración, este paso se repetirá cuantas veces sea necesario y solo se dará por terminado el método según los siguientes criterios.

	Maximizar	Minimizar
Solución Óptima	Cuando todos los Cj - Zj sean <= 0	Cuando todos los Cj - Zj sean >= 0

Continuamos con las iteraciones para lo cual tenemos que repetir los pasos anteriores.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
	S1	6	1	0	0.5	0	1	-0.5	0	-0.5
20000	X2	10	1	1	0.5	0	0	0.5	0	0
	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0.5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	90000	20000	20000	10000	20000	0	10000	0	5000
	Cj - Zj		0	0	10000	0	0	-10000	0	-5000

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
20000	X1	6	1	0	0.5	0	1	-0.5	0	-0.5
20000	X2	4	0	1	0	0	-1	1	0	0.5
	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0.5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	280000	20000	20000	10000	20000	0	10000		5000
	Cj - Zj		0	0	10000	0	0	-10000	0	-5000

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
20000	X1	3	1	0	0	0	1	-0.5	-0.25	-0.375
20000	X2	4	0	1	0	0	-1	1	0	0.5
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0.5	-0.25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	340000	20000	40000	20000	20000	0	10000	5000	2500
	Cj - Zj		0	-20000	0	0	0	-10000	-5000	-2500

En esta última iteración podemos observar que se cumple con la consigna Cj - Zj <= 0, para ejercicios cuya función objetivo sea "Maximizar", por ende hemos llegado a la respuesta óptima.

X_1 = 3

X_2 = 4

X_3 = 6

X_4 = 4

Con una utilidad de: $ 340000

Sin embargo una vez finalizado el Método Simplex se debe observar una matriz identidad en el rectángulo determinado por las variables de decisión, el hecho de que en este caso no se muestre la matriz identidad significa que existe una solución óptima alterna.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
20000	X1	3	1	$\boxed{1}$	0	0	1	-0.5	-0.25	0.125
20000	X2	4	0	1	0	0	-1	1	0	0.5
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0.5	-0.25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	340000	20000	40000	20000	20000	0	10000	5000	12500
	Cj - Zj		0	-20000	0	0	0	-10000	-5000	-12500

Este valor impide que se forme la matriz identidad con las variables de decisión lo cual indica que existe una solución óptima alterna.

La manera de llegar a la otra solución consiste en alterar el orden en que cada una de las variables entro a la solución básica, recordemos que el proceso fue decidido al azar debido a la igualdad en el Cj - Zj del tabulado inicial. Aquí les presentamos una de las maneras de llegar a la otra solución.

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	24	2	1	1	2	1	0	0	0
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	20	0	0	2	2	0	0	1	0
0	S4	16	0	0	0	4	0	0	0	1
	Zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Cj - Zj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	16	2	1	1	0	1	0	0	-0.5
0	S2	20	2	2	1	0	0	1	0	0
0	S3	12	0	0	2	0	0	0	1	-0.5
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	80000	0	0	0	20000	0	0	0	5000
	Cj - Zj		20000	20000	20000	0	0	0	0	-5000

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	10	2	1	0	0	1	0	-0.5	0.25
0	S2	14	2	2	0	0	0	1	-0.5	0.25
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0.5	-0.25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	200000	0	0	20000	20000	0	0	10000	0
	Cj - Zj		20000	20000	0	0	0	0	-10000	0

	Cj		20000	20000	20000	20000	0	0	0	0
Cb	Variable Solucion	Solucion	X1	X2	X3	X4	S1	S2	S3	S4
0	S1	3	1	0	0	0	1	-0.5	-0.25	0.125
20000	X2	7	1	1	0	0	0	0.5	-0.25	0.125
20000	X3	6	0	0	1	0	0	0	0.5	-0.25
20000	X4	4	0	0	0	1	0	0	0	0.25
	Zj	340000	20000	20000	20000	20000	0	10000	5000	2500
	Cj - Zj		0	0	0	0	0	-10000	-5000	-2500

Podemos observar como existe una solución óptima alternativa en la cual la combinación de variables es distinta y existe un menor consumo de recursos, dado que el hecho de que se encuentre la variable "S1" en la solución óptima con un coeficiente de "3" significa que se presenta una holgura de 3 unidades del recurso (pieza rectangular de 8 pines).

X1 = 0 (Cantidad de mesas a producir = 0)

X2 = 7 (Cantidad de sillas a producir = 7)

X3 = 6 (Cantidad de camas a producir = 6)

X4 = 4 (Cantidad de bibliotecas a producir = 4)

S1 = 3 (Cantidad de piezas rectangulares de 8 pines sin utilizar =3)

Con una utilidad de: $ 340000